( Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir. )

**11. 1. 1. 4.** **Koşullu önermeyi açıklar, koşullu önermenin karşıtını, tersini, karşıt tersini yazar ve doğruluk tablosu kullanarak denk olanları gösterir.**

**( $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ olduğu doğruluk tablosu yardımıyla gösterilir. )**

**( Ve, veya, ya da, ise bağlaçları kullanılarak verilen en fazla iki önerme içeren ve en fazla dört bileşenli bileşik önermelere denk basit önermeler buldurulur. )**

**11. 1. 1. 5.** **İki yönlü koşullu önermeyi açıklar.**

**( $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ olduğu doğruluk tablosu ile gösterilir. )**

**11. 1. 1. 6.** **Sözel olarak veya sembolik mantık dilinde verilen bileşik önermeleri birbirine dönüştürür.**

**11. 1. 1. 7.** **Totoloji ve çelişkiyi örneklerle açıklar.**

## 11. 1. 2. Açık Önermeler ve İspat Teknikleri

**Terimler :** Açık önerme, her, bazı, tanım, aksiyom, teorem, hipotez, hüküm, ispat, tümevarım.

**Sembol ve Gösterimler :** ∃ , ∀

**11. 1. 2. 1.** Her ( ∀ ) ve bazı ( ∃ ) niceleyicilerini örneklerle açıklar.
( Sözel olarak verilen ve niceleyici içeren açık önermeler sembolik mantık diliyle; sembolik mantık diliyle verilen ve niceleyici içeren açık önermeler de sözel olarak ifade edilir. )

**11. 1. 2. 2.** Açık önermeyi ve doğruluk kümesini örneklerle açıklar.
( Denklem ve eşitsizliklerin açık önerme olduğu vurgulanır. )

**11. 1. 2. 3.** Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir.

**11. 1. 2. 4.** Mantık kurallarını basit teoremlerin ispatlarında kullanır.
( Aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan ispat ve çelişki yoluyla ispat teknikleri verilir. )

**11. 1. 2. 5.** Tümevarım yöntemi ile ispat yapar.

## *4 ) İse Bağlacı ( ⇒ )* ( Koşullu Önerme )

**p ve q iki önerme olsun. Bu önermelerin ise bağlacı ile bağlanması sonucunda oluşan bileşik önermeye " koşullu önerme " adı verilir.**

**Babası Ali'ye, " Tıp fakültesini kazanırsan sana araba alacağım. " diyor.**

**p : " Ali tıp fakültesini kazandı. "**

**q : " Babası arabayı aldı. " önermelerini alalım.**

| p | q | p ⇒ q |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

**Tıbbı kazanırsa babası arabayı alır.**

**Tıbbı kazanırsa babası arabayı almaz.**

**Tıbbı kazanmazsa da babası arabayı alabilir.**

**Tıbbı kazanmazsa babası arabayı almaz.**

***Not :*** **p ⟹ q bileşik önermesinde; p doğru q yanlış iken sonuç yanlış, diğer durumlarda ise sonuç doğrudur.**

***Soru :*** *A )* **( 1 ⟹ 0 )' ⟹ ( 0 ∨ 1' ) ≡ ?**

*B )* **1 ⟹ [ ( 0 ⟹ 0 ) ∧ ( 0 ⊻ 0 )' ] ≡ ?**

***Soru :*** **p : “ $x < 0$ durumunda $x^2 > 0$ olur. ” ve q : “ $x^2 = 4$ için $x = 2$ ’dir. ” önermeleri için $q \Longrightarrow p$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.**

## *Örnek :*

**$p \Longrightarrow q' \equiv 0$ ve $r \wedge s \equiv 1$ ise $(r' \vee q) \Longrightarrow (p \veebar s) \equiv ?$**

***Soru :*** $p' \Rightarrow ( q \vee r' ) \equiv 0$ ise $( p \wedge q )' \Rightarrow r \equiv ?$

***Soru :*** $(p' \Rightarrow q)' \wedge r' \equiv 1$ ise $[p \wedge (q' \Rightarrow r)]' \equiv ?$

***Tanım :*** $p \Rightarrow q$ **önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye "gerektirme" adı verilir.**

***Soru :*** $p$ : " $2^3 < 3^2$ " ve $q$ : " $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$ " **önermeleri için** $p \Rightarrow q$ **önermesinin bir gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.**

***Soru :*** **p : “ $(2/3)^{-2} = 9/4$ ” ve q : “ $\sqrt[3]{-27} = -3$ ” önermeleri için $q' \Rightarrow p$ önermesinin bir gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.**

## *Koşullu Önermenin Karşıtı, Tersi, Karşıt Tersi*

**$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$ ’dir.**

**$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$ ’dir.**

**$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ ’dir.**

***Örnek :*** **“ Bir üçgenin kenarları eş ise iç açıları da birbirine eşittir. ” $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı, tersi ve karşıt tersini bulunuz.**

**Karşıtı :**

**Tersi :**

**Karşıt tersi :**

***Soru :*** **“ $x = 2$ ise $3x + 1 = 7$ ’dir. ” önermesinin karşıt tersini bulunuz.**

# Koşullu Önermenin Özellikleri :

**1 )** $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ **denkliği sağlanır. Aşağıdaki tablodan da denkliğin ispatı yapılabilir.**

| p | q | p ' | q ' | $p \Rightarrow q$ | $q' \Rightarrow p'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

***** 2 )** $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ **denkliği sağlanır. Tablo çizerek de denkliğin ispatı yapılabilir.**

## *** 3 ) Özel Durumlar

| | | |
|---|---|---|
| $p \Rightarrow 1 \equiv 1$<br>$1 \Rightarrow 1 \equiv 1$<br>$0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ | $p \Rightarrow 0 \equiv p'$<br>$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$<br>$0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ | $1 \Rightarrow p \equiv p$<br>$1 \Rightarrow 1 \equiv 1$<br>$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ |
| $0 \Rightarrow p \equiv 1$<br>$0 \Rightarrow 1 \equiv 1$<br>$0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ | $p \Rightarrow p \equiv 1$<br>$1 \Rightarrow 1 \equiv 1$<br>$0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ | $p \Rightarrow p' \equiv p'$<br>$1 \Rightarrow 0 \equiv 0$<br>$0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ |

**Örnek :** $p' \Rightarrow p$ **önermesinin denkliğini siz bulunuz.**

**Örnek :** $(p \Rightarrow q) \vee p \equiv ?$

***Soru :*** $p \wedge ( p \Rightarrow q' )' \equiv ?$

***Soru :*** $[ ( p \wedge q ) \Rightarrow p ] \equiv ?$

***Soru :*** $[\,(\,p \Rightarrow q\,)' \wedge q\,]' \equiv\ ?$

***Soru :*** $(\,q' \Rightarrow p\,)' \vee (\,p \Rightarrow q\,)' \equiv\ ?$

## 5 ) Ancak Ve Ancak Bağlacı ( $\Leftrightarrow$ ) ( İki Yönlü Koşullu Önerme )

$p \Rightarrow q$ önermesi ile karşıtı olan $q \Rightarrow p$ önermesinin " ve " bağlacı ile bağlanması sonucu oluşan bileşik önermeye " iki yönlü koşullu önerme " adı verilir.

$p \Leftrightarrow q \equiv ( p \Rightarrow q ) \wedge ( q \Rightarrow p )$ olarak alınır.

Aşağıdaki tabloyu dolduralım.

$p \Leftrightarrow q$

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $( p \Rightarrow q ) \wedge ( q \Rightarrow p )$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

***Not :*** **p ⇔ q önermesinin sonucunda; p ile q 'nun değeri aynı olma durumunda sonuç 1, farklı olma durumunda ise sonuç 0 olarak alınır.**

***Soru :*** **[ 1 ' ⇔ ( 0 ∨ 1 ) ] ' ⊻ ( 0 ⇔ 0 ) ≡ ?**

***Soru :*** **p ≡ 1 , q ≡ 0 ve r ≡ 1 ise**

**( p ∨ q )' ⇔ [ r' ⟹ ( p' ∧ q ) ] ≡ ?**

***Soru :*** $(p \Rightarrow q)' \wedge r' \equiv 1$ ise $r \Leftrightarrow (q' \wedge p) \equiv ?$

## *Soru :*

**[ q ⇔ ( p ∧ r ) ]' ⟹ q ≡ 0 ise ( p ∨ r' ) ⇔ ( q ∧ p )' ≡ ?**

***Soru :*** **( p ∨ q ) ⇔ q ≡ ( p ⇒ q ) olduğunu gösteriniz.**

**( Ancak ve ancak bağlacının açılımından elemanlar düzenlenerek istenene ulaşılır. Ama işlem uzun ve karışıktır. Bunun yerine denkliği tablodan ispatlamak daha kolaydır. )**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

***Tanım :*** **$p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önermeye " çift gerektirme " adı verilir.**

***Soru :*** **p : " Çift asal sayı yoktur. " ve q : " Negatif sayının çift kuvvetinin sonucu pozitif tam sayı olur. " önermeleri için $q \Leftrightarrow p'$ önermesinin çift gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.**

***Soru :*** **p ≡ 0 , q' ≡ 1 ve r ≡ 1 ise**

**[ r ⇔ ( r' ⇔ p ) ] ⇔ ( p ⇒ q ) önermesinin çift gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.**

***Soru :*** **( p ∨ q ) ⇔ ( p' ∧ q' ) önermesinin çift gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz. ( Ancak ve ancak bağlacının açılımından veya tablodan sonucu bulmak da mümkündür. Ama iki parantez arasındaki bağı görebilirseniz çözümü bulmak daha kolaydır. )**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

# İki Yönlü Koşullu Önermenin Özellikleri :

1 ) $p \Leftrightarrow q \equiv q' \Leftrightarrow p'$ denkliği sağlanır. İstenirse tablodan da denkliğin ispatı yapılabilir.

***2 ) $p \Leftrightarrow p \equiv 1$

$p \Leftrightarrow p' \equiv 0$

$p' \Leftrightarrow p \equiv 0$

$p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$

$0 \Leftrightarrow p \equiv p'$

$p \Leftrightarrow 1 \equiv p$

$1 \Leftrightarrow p \equiv p$

} denklikleri sağlanır.

***Soru :*** $(\ p \Leftrightarrow p'\ ) \Leftrightarrow (\ 1 \Leftrightarrow p\ ) \equiv\ ?$

***Soru :*** $[\ (\ 0 \Leftrightarrow p\ ) \wedge (\ 1 \Leftrightarrow q\ )\ ]' \vee q \equiv\ ?$

# *Açık Önermeler*

***Tanım :*** **( Açık Önerme ) İçerisinde en az bir değişken bulunan ve değişkenin durumuna göre doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere " açık önerme " adı verilir.**

**Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine " doğruluk kümesi " adı verilir.**

***Örnek :*** **Aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri açık önermedir ?**

**p : " İstanbul Türkiye'nin yüz ölçümü olarak en büyük ilidir. "**

**q : " $x \in Z$ , $3x - 6 = 11$ "**

**r : " Bugün hava yağışlı olacakmış. "**

**s : " x ve y doğal sayı olmak üzere $x = 3y$ 'dir. "**

***Örnek :*** **p ( x ) : “ $x \in Z$ , $x^2 \leq 4$ ” açık önermesini doğru yapan x değerlerini bulunuz.**

***Soru :*** **s : “ x ve y doğal sayı olmak üzere x = 3y ’dir. ” açık önermesini doğru yapan x ve y değerlerini bulunuz.**

***Soru :*** **p : " $x \in Z$ , $x^2 - 5x - 24 = 0$ " açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.**

## *Niceleyiciler*

**Önüne geldiği elemanların çokluğunu belirten " bazı ( en az bir ) ve her " ifadelerine " niceleyiciler " adı verilir.**

**Her sözcüğü ile bütün, tüm, tamamı sözcükleri aynı anlama gelir. Her kelimesi yerine $\forall$ sembolü kullanılır.**

**Bazı sözcüğü en az bir anlamındadır. En az bir yerine $\exists$ sembolü kullanılır.**

***Örnek :*** **p : “ Bazı reel sayılar sıfırdan büyük veya sıfıra eşittir. ” sözlü olarak verilen önermeyi sembolik mantık diliyle yazıp önermenin doğruluk değerini bulalım.**

**p : “ $\exists\, x \in R\,,\, x \geq 0$ ” olarak yazılır.**

**Örneğin, $5 \in R$ olup $5 \geq 0$ ’dır. Dolayısıyla $p \equiv 1$ ’dir.**

***Soru :*** **p : “ Her x doğal sayısı 0 ’dan büyüktür. ” ve q : “ En az bir tam sayının karesi 4 ’tür. ” sözlü olarak verilen önermeleri sembolik mantık diliyle yazıp, önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.**

***Soru :*** **p : “ $\exists\, x \in R\,,\, x^2 + 1 = 0$ ” ve q : “ $\forall\, x \in Z\,,\, x^2 \geq 0$ ” sembolik mantık diliyle verilen önermeleri sözlü olarak yazıp, önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.**

# Her ve Bazı Niceleyicilerinin Değili :

**p bir açık önerme ise p 'nin değili p ' ile gösterilir.**

**Aşağıdaki tabloda bazı sembollerin değili verilmiştir.**

| Sembol | $=$ | $\equiv$ | $<$ | $>$ | $\leq$ | $\geq$ | $\exists$ | $\forall$ | $\wedge$ | $\vee$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Değili | $\neq$ | $\not\equiv$ | $\geq$ | $\leq$ | $>$ | $<$ | $\forall$ | $\exists$ | $\vee$ | $\wedge$ |

*Örnek :* **p : " $\exists\, x \in R\,,\ 3x - 6 = 0$ " önermesinin değilini bulunuz.**

***Soru :*** **p : “ $\forall x \in N , x^2 \leq 1$ ” önermesinin değilini ve değilinin doğruluk değerini bulunuz.**

***Soru :*** $p$ : " $\forall\, x \in Z\,,\ 2x = 4$ " $\wedge$ " $\exists\, x \in N\,,\ \frac{4}{x} > 1$ " öner-

**mesinin değilini ve değilinin doğruluk değerini bulunuz.**

***Soru :*** **p : “ $\exists\, x \in Z\,,\, x^2 < 0$ ” $\vee$ “ $\forall\, x \in R\,,\, x^2 > x^3$ ” önermesinin değilini ve değilinin doğruluk değerini bulunuz.**

***Soru :*** $p$ : “ $\exists\, x \in R\,,\, x + 3 = 5$ ” $\Rightarrow$ “ $\exists\, x \in N\,,\, \sqrt{x} = 25$ ”

**önermesinin değilini ve değilinin doğruluk değerini bulunuz.**

**( $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ idi. )**

***Soru :*** **p : “ $\exists\, x \in Z\,,\, x^2 - 4 = 0$ ” $\Rightarrow$ “ Eşkenar dörtgenin tüm kenarları birbirine eşittir. ” önermesinin karşıt tersini bulup, karşıt tersinin doğruluk değerini bulunuz.**

# *Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat Kavramları*

**Her bilim dalının kendine özgü anlam içerek sözcükleri ve dolayısıyla bir dili vardır. Bu sözcüklerin her birine o bilim dalının " terimi " adı verilir.**

**Dörtgen, açı, fonksiyon, denklem v.b. kavramlar birer matematiksel terimdir ve başka matematiksel terimler yardımıyla tanımlanabilir. Bu tür terimlere " tanımlı terimler " denir.**

**Ancak; nokta, doğru , düzlem v.b. terimleri tanımlamak her zaman mümkün değildir. Bu tür terimlere de " tanımsız terimler " adı verilir. Tanımsız terimler genellikle sezgilerimizle ve çevremiz-de bulunan çeşitli örnekler üzerinden kavranabilir.**

***Örnek :*** **" Küme, üçgen, polinom, açı, uzay, ışın, çember, asal sayı " terimlerinden tanımlı ve tanımsız terimleri belirleyiniz.**

***Not :*** **İyi bir tanımda olması gereken özellikler şunlardır:**

- **Tanımlı ve tanımsız terimlerden yararlanmalıdır.**
- **Herkes için açık, anlamlı ve tutarlı olmalıdır.**

***Soru :*** **Aşağıdaki ifadelerden, iyi tanım olanları belirleyiniz.**

**A ) Bütün kenarları birbirine eşit olan düzgün çokgene "eşkenar üçgen " adı verilir.**

**B ) Sadece kendisine bölünebilen sayılara " asal sayı " adı verilir.**

**C ) Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere " önerme " adı verilir.**

**D ) Herhangi dört noktanın birleştirilmesiyle oluşan dörtgene " kare " adı verilir.**

***Tanım :*** **Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önermelere "aksiyom" denir. Doğruluğu ispatlanması gereken önermelere ise "teorem" adı verilir.**

***Soru :*** **Aşağıda verilen ifadelerden aksiyom ile teorem olanları yanlarına belirtiniz.**

**A ) Tüm dik açılar eşittir.**

**B ) Bir tek sayının çift kuvveti yine bir tek sayıyı verir.**

**C ) Bir bütün, kendisini oluşturan parçalardan daha büyüktür.**

**D ) Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği yine kendisine eşittir.**

***Tanım :*** **Doğruluğu ispatlanması gereken önermelere teorem adı verilir demiştik. Bir teoremin verilen kısmına " hipotez " ( varsayım ) , ispatlanacak olan kısmına ise " hüküm " ( yargı ) adı verilir.**

***Örnek :*** **Aşağıda verilen teoremlerin hipotez ve hükümlerini belirleyip, mantıksal sembol ile yazınız.**

***A )*** **İki çift sayının toplamı çift sayıdır.**

**Hipotez :** $p$ : x ve y çift sayıdır.

**Hüküm :** $q$ : x + y çift sayıdır.

**Teorem :** $p \Rightarrow q$ : x ve y çift ise x + y çift sayıdır.

***B )*** **Bir doğal sayının ardışığı yine bir doğal sayıdır.**

# *İspat Yöntemleri*

**Bir teoremin doğruluğunu bulmada kullanılan yöntemdir. İspat kavramı; mantığa ait kuralları kullanır ve bu bağlamda tanım, hipotez, aksiyom veya her biri daha önceden ispatlanmış teoremlerden yararlanır. İspat çeşitleri iki gruba ayrılır.**

***1 ) Tümdengelim :*** **Kesin sonuç veren akıl yürütmeye " tümdengelim " adı verilir. Genelden özele ya da yasalardan olaylara geçiş şeklindeki akıl yürütmedir.**

***A ) Doğrudan İspat Yöntemi :*** **Doğrudan ispat, en temel ispat çeşididir.Doğruluğu ispatlanacak önerme; başka tanım önerme, hipotez, aksiyom veya doğruluğu önceden ispatlanmış teoremler yardımıyla mantık kuralları içerisinde doğrudan ispatlanır.**

**Bir teoremin hipotezinin doğruluğundan hareketle, teoremin hükmünün de doğru olduğunun gösterilmesine " doğrudan ispat yöntemi " adı verilir.**

***Soru :*** **“ Bir çift sayının karesi çittir. ” önermesini ispatlayınız.**

**( x çift tam sayısını $a \in Z$ için $x = 2a$ olarak alalım. Kısa yol : Önermenin doğruluğu için şarta uygun sayı verilir ve sonuç kontrol edilir. )**

***B ) Dolaylı İspat Yöntemi :*** **Bir teoremin kendisini ispatlama yerine, teoremin doğruluğunu gösteren bu teoreme denk başka bir önermenin doğruluğunu ispatlamaya " dolaylı ispat yöntemi " adı verilir. Kendi içinde üç gruba ayrılır.**

***i. Aksine Örnek Verme İspat Yöntemi :*** **Bir önermeni doğru olmadığını aksi bir örnek ( şartı sağlamayan ) vererek ispatlamaya " aksine örnek verme yoluyla ispatlama " denir.**

***ii. Karşıt Tersle İspat Yöntemi :*** **Bir teoremin hükmünün değilinden hareketle, teoremin hipotezinin değilini elde etmeye " karşıt tersle ispat " denir.**

***iii. Çelişkiyle İspat Yöntemi :*** **Bir teoremin hipotezinin doğru olduğu varsayılıp, hükmünün değilinin hipotez ile çeliştiğinin gösterilmesine " çelişkiyle ispat " denir.**

## *2 ) Tümevarım İspat Yöntemi :* Bir önermenin; genellikle tüm doğal sayılar için ya da bazen sonsuz bir sıranın tüm elemanları için, doğru olduğunu göstermek üzere kullanılan bir matematiksel yöntemdir. Yöntem tekniği altta sırası ile verilmiştir.

**$n \in Z^+$ için P ( n ) önermesi verilsin.**

**i. n = 1 için P ( 1 ) doğru olsun.**

**ii. $k \in Z^+$, n = k için P ( k ) doğru olsun.**

**iii. n = k + 1 için de P ( k + 1 )'de doğru ise her $n \in Z^+$ için P ( n ) önermesi doğru olur.**

**Bu ispat yöntemine " matematiksel tümevarım ilkesi " adı verilir.**

***Örnek :*** $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

**önermesini $\forall\ n \in Z^+$ için sağlandığını tümevarım yöntemiyle ispatlayınız.**

***Soru :*** $\forall\ n \in Z^+$ **için** $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ **olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayınız.**